CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by Meiji Repository (Meiji University Academic Repository)

静的ハザードの検出について

向殿政男

On a detection of Static Hazards

Masao MUKAIDONO

Synopsis

In the previous thesis, we reported on a formalization of static hazards resulting from the simultaneous change of multiple-input variables by means of B-ternary functions.

According to those results, the method of detection of static hazards are studied here. Particularly we stated about the logical equations which represent a necessary and sufficient condition for the existence of static hazards.

This report is concerned with the static hazards which permit the simultaneous change of multiple-input variables in the circuits constructed of gate type AND, OR, NOT elements.

1. まえがき

論理回路に発生するハザードについて，古くから多くの研究が行なわれている[1)2)]。特に，B-3 値論理がハザードの研究に適用できることが見い出され，AND，OR，NOT 素子で構成されている論理回路網内に発生する静的ハザードに関してはその性質がかなり明らかにされている[3)4)5)6)]。

前報告[6)] では，さらに発展させた B-3 値論理および B-3 値論理関数の理論を用いて静的ハザードを定式化して見通しの良いものとし，静的ハザードに関しての新しいいくつかの性質を明らかにした。

本報告では，これらの結果にもとづいて静的ハザードの検出について考察する。特に，静的ハザードが存在することを表わす論理式について言及する。

なお，本論文で取り扱うハザードは，ゲート形の AND，OR，NOT 素子で構成されている組み合せ回路における静的ハザードに限る。

2. 静的ハザードが存在するための必要十分条件

この章では，前報告[6)] にしたがい，静的ハザードの存在，および各種のハザードの存在条件について要約しておく。

真理値0, 1/2, 1からなる集合をV_3, 0, 1からなる集合をV_2で表わす。V_3^nでV_3のn次元直積空間を表わし，V_3^nの元をとる変数を$\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots\ldots, x_i, \ldots\ldots, x_n)$で表わすものとする。

いま，Fをn変数のB-3値論理関数とし，二つの入力状態，$\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots\ldots, a_i, \ldots\ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, \ldots\ldots, b_i, \ldots\ldots, b_n)$の間の入力変化で$F$に存在する静的ハザードについて考察する。ここで，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$はそれぞれ2値(0, 1)からなっている。

すなわち，

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \in V_2^n$$

である。また，前報告[6]の定理4-2に述べたように，入力変化$\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}$でハザードが存在すれば，$\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}$でも生ずるから，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$の間の入力変化を

$$\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$$

のように表わす。このとき，各種の静的ハザードが存在するための必要十分条件は次のように述べられる。

性質1： 入力変化$\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$で$F(\boldsymbol{x})$に静的ハザードが存在するための必要十分条件は，

(i)　$F(\boldsymbol{a})=F(\boldsymbol{b})$,

(ii)　$F(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$

である。|| ここで，記号 || は定理，系，性質などの終りを示す。

性質2： 入力変化$\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$で$F(\boldsymbol{x})$に0ハザード存在するための必要十分条件は，

(i)′ $F(\boldsymbol{a})=F(\boldsymbol{b})=0$,

(ii)　$F(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$

である。||

性質3： 入力変化$\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$で$F(\boldsymbol{x})$に1ハザードが存在するための必要十分条件は，

(i)″ $F(\boldsymbol{a})=F(\boldsymbol{b})=1$,

(ii)　$F(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$

である。||

性質4： 入力変化$\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$で$F(\boldsymbol{x})$に関数ハザードが存在するための必要十分条件は，

(i)　$F(\boldsymbol{a})=F(\boldsymbol{b})$,

(ii)　$F(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$,

(iii)　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=\{0,\ 1\}$

である。||

性質5： 入力変化$\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$で$F(\boldsymbol{x})$に論理ハザードが存在するための必要十分条件は，

(i)　$F(\boldsymbol{a})=F(\boldsymbol{b})$,

(ii)　$F(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$, (iii)′ $F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)\neq\{0,\ 1\}$

である。||

以上の性質により，入力変化 $\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$ で $F(\boldsymbol{x})$ にハザードが存在するか否かは，上記の各種方程式に代入することにより，すぐ確かめることができる。ここで，関数ハザードか論理ハザードかの分離条件 (iii)，(iii)′ を確かめることは，非常に手間のいることである。ところが，前報告[6] 定理4-4より素項展開には論理ハザードが存在しないことが知られているから，$F(\boldsymbol{x})$ の素項展開を $F_P(\boldsymbol{x})$ で表わすとき，次の定理により，この分離は容易になる。なお，$F(\boldsymbol{x})$ の素項展開 $F_P(\boldsymbol{x})$ を求める手順は多く存在する。ただし，$F(\boldsymbol{x})$ と $F_P(\boldsymbol{x})$ とは B-3 値論理関数としてみたときは別の関数であるが，入力を 2 値 (0, 1) に限れば，すなわち，2 値論理関数としては等しい関数である。

定理 2—1：入力変化 $\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$ で $F(\boldsymbol{x})$ に関数ハザードが存在するための必要十分条件は，

(i) $F(\boldsymbol{a})=F(\boldsymbol{b})$,

(ii) $F(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$,

(iii)″ $F_P(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$

である。||

証明）$F(\boldsymbol{x})$ と $F_P(\boldsymbol{x})$ は入力を 2 値に限れば等しいから $F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=F_P((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)$ である。一方，$F_P(\boldsymbol{x})$ は素項展開であるから P 形論理関数であり（前報告[6] 定理3—5），P 形論理関数ならば $F_P((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=\{0,\ 1\}$ ならば $F_P(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})=1/2$ であり，逆も成立する（前報告[6] 定義 3—1)。よって，条件 $F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=\{0,\ 1\}$ と条件 $F_P(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})=1/2$ とは等しいから性質 4 より明らか。▮ここで，記号▮は証明の終りを示す。

定理 2—2：入力変化 $\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$ で $F(\boldsymbol{x})$ に論理ハザードが存在するための必要十分条件は，

(i) $F(\boldsymbol{a})=F(\boldsymbol{b})$,

(ii) $F(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$,

(iii)‴ $F_P(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})\neq\dfrac{1}{2}$

である。||

証明）定理 2—1 の証明と同様に，条件 $F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)\neq\{0,\ 1\}$ と，条件 $F_P(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})\neq1/2$ とは等しいから性質 5 より明らか。▮

3. 変化する変数がわかっている場合に静的ハザードの存在を表わす論理式

入力 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots\ldots,x_i,\ldots\ldots,x_n)$ のうち，P 個の変数が変化する場合*1（その変数を $x_1,\ldots\ldots,x_P$ と仮定して一般性を失なわない），その時に静的ハザードが存在するための必要十分条件を，変数 $x_1,\ldots\ldots,x_P$ を論理変数とする論理式で表現しよう。

* 1：杉野，稲垣，福村[5] の論文では，この場合を取り扱っている。

B-3 値論理関数 $F(\boldsymbol{x})$ は，入力を 2 値 $(0,1)$ に限ると 2 値論理関数とみなすことができる。$F(\boldsymbol{x})$ を 2 値論理関数としてみたときの関数を

$$|f|_F(\boldsymbol{x})$$

で表わすことにする。

変化する変数 $x_1, \ldots\ldots, x_P$ のすべてに 1/2 を代入し，他の変数は 2 値論理変数としたとき，一般に B-3 値論理関数 $F(1/2, \ldots\ldots, 1/2, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n)$ は次のように表現できる。

$$F\left(\frac{1}{2}, \ldots\ldots, \frac{1}{2}, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n\right) = f_F{}^1(x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n) \vee \frac{1}{2} \cdot f_F{}^{\frac{1}{2}}(x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n)$$

ここで，$f_F{}^1$，$f_F{}^{\frac{1}{2}}$ は 2 値論理関数である。このとき，次の定理が成立する。

定理 3—1：変数 $x_1, \ldots\ldots, x_P$ が変化するとき，$F(\boldsymbol{x})$ に静的ハザードが存在することを表わす論理式は，

$$\sim f_F{}^1(x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n) \cdot f_F{}^{\frac{1}{2}}(x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n) \cdot \{|f|_F(x_1, \ldots\ldots, x_P, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n) \cdot |f|_F(\sim x_1, \ldots\ldots, \sim x_P, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n) \vee \sim |f|_F(x_1, \ldots\ldots, x_P, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n) \cdot \sim |f|_F(\sim x_1, \ldots\ldots, \sim x_P, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n)\}$$

となる。||

証明）静的ハザードの存在を表わす条件

（i）　$F(\boldsymbol{a}) = F(\boldsymbol{b})$

は，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ ともに 2 値であるから，論理式

$$|f|_F(\boldsymbol{a}) \cdot |f|(\boldsymbol{b}) \vee \sim |f|_F(\boldsymbol{a}) \cdot \sim |f|_F(\boldsymbol{b})$$

で表わされる。いま，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a} = (x_1, \ldots\ldots, x_P, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n)$$

$$\boldsymbol{b} = (\sim x_1, \ldots\ldots, \sim x_P, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n)$$

と書けるから，条件（i）は

$$|f|_F(x_1, \ldots\ldots, x_P, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n) \cdot |f|_F(\sim x_1, \ldots\ldots, \sim x_P, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n) \vee \sim |f|_F(x_1, \ldots\ldots, x_P, x_{P+1}, \ldots\ldots x_n) \cdot \sim |f|_F(\sim x_1, \ldots\ldots, \sim x_P, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n)$$

で表わされる。

一方，条件

（ii）　$F(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b}) = \dfrac{1}{2}$

は，いまの場合

$$\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \left(\frac{1}{2}, \ldots\ldots, \frac{1}{2}, x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n\right)$$

より

$$F(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b}) = f_F{}^1(x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n) \vee \frac{1}{2} \cdot f_F{}^{\frac{1}{2}}(x_{P+1}, \ldots\ldots, x_n) = \frac{1}{2}$$

となるから，論理式

$$\sim f_F{}^1(x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)\cdot f_F{}^{\frac{1}{2}}(x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)$$

で表わさせる。

以上により，静的ハザードが存在するのは（i）かつ（ii）のときであるから（性質1），定理を得る。▮

B-3 値論理関数 F を2値論理関数 $|f|_F$ としてみるときは，相補積（和）単項式は省略できるから，F の加（乗）法標準形のみを考察すればよい。

系 3—1：変数 $x_1,\ldots\ldots,x_P$ が変化するとき，$F(\boldsymbol{x})$ に0ハザードが存在することを表わす論理式は

$$\sim f_F{}^1(x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)\cdot f_F{}^{\frac{1}{2}}(x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)\cdot\sim|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,x_P,x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)$$
$$\cdot\sim|f|_F(\sim x_1,\ \ldots\ldots,\sim x_P,x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)$$

である。||

証明）0ハザードの存在を表わす性質2および定理3—1より明らか。▮

系 3—2：変数 $x_1,\ldots\ldots,x_P$ が変化するとき，$F(\boldsymbol{x})$ に1ハザードが存在することを表わす論理式は

$$\sim f_F{}^1(x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)\cdot f_F{}^{\frac{1}{2}}(x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)\cdot|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,x_P,x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)$$
$$\cdot|f|_F(\sim x_1,\ \ldots\ldots,\sim x_P,x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)$$

である。||

証明）1ハザードの存在を表わす性質3および定理3—1より明らか。▮

論理式
$$\bigvee_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x})\qquad\Big(\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x})\Big)$$

は，$|f|_F$ の変数 $x_1,\ldots\ldots,x_P$ のすべてに0または1を代入して得られるすべての式の OR（AND）で表現される論理式を表わすものとする。

定理 3—2：変数 $x_1,\ldots\ldots,x_P$ が変化するとき，$F(\boldsymbol{x})$ に関数ハザードが存在することを表わす論理式は，

$$\sim f_F{}^1(x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)\cdot f_F{}^{\frac{1}{2}}(x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)\cdot\{|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,x_P,x_{P+1},\ \ldots\ldots x_n)$$
$$\cdot|f|_F(\sim x_1,\ \ldots\ldots,\sim x_P,x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)\cdot\Big(\bigvee_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}\sim|f|_F(\boldsymbol{x})\Big)\vee$$
$$\sim|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,x_P,x_{P+1},\ \ldots\ldots x_n)\cdot\sim|f|_F(\sim x_1,\ \ldots\ldots,\sim x_P,x_{P+1},\ \ldots\ldots,x_n)$$
$$\cdot\Big(\bigvee_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x})\Big)\}$$

である。||

証明）関数ハザードの存在を表わす条件

(iii)　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=\{0,\ 1\}$

は，条件

(iv)　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)\fallingdotseq\{0\}$，かつ

(v)　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)\fallingdotseq\{1\}$

と等しい。

一方，条件

(iv)′　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=\{0\}$

は，変化する変数すべてに 0 または 1 を代入した F の値がすべて 0 であることを示している。

いまの場合

$$\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{2},\ x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n\right)$$

より，論理式

$$\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}\sim|f|_F(\boldsymbol{x})$$

は上の条件 (iv)′を表わす論理式となる。同様に，条件

(v)′　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=\{1\}$

を表わす論理式は

$$\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x})$$

となる。

よって，条件 (iii) を表わす論理式は

$$\sim(\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}))\cdot\sim(\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x}))=(\bigvee_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x}))\cdot(\bigvee_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}))$$

となる。一方，

$$|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_P,\ x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot(\bigvee_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x}))=|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_P,\ x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n),$$

$$\sim|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_P,\ x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot(\bigvee_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}))=\sim|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_P,\ x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)$$

より，性質 4，および定理 3—1 より定理が得られる。▮

系 3—3：変数 $x_1,\ldots\ldots,x_P$ が変化するとき，$F(\boldsymbol{x})$ に関数 0 ハザードが存在することを表わす論理式は，

$$\sim f_{F^1}(x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot f_{F^{\frac{1}{2}}}(x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot\sim|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_P,\ x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)$$
$$\cdot\sim|f|_F(\sim x_1,\ \ldots\ldots,\ \sim x_P,\ x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot(\bigvee_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x}))$$

である。||

証明）0 ハザードの存在を表わす性質 2 および定理 3—2 より明らか。▮

系 3—4：変数 $x_1,\ldots\ldots,x_P$ が変化するとき，$F(\boldsymbol{x})$ に関数 1 ハザードが存在することを表わす論理式は，

$$\sim f_{F^1}(x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot f_{F^{\frac{1}{2}}}(x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_P,\ x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)$$
$$\cdot|f|_F(\sim x_1,\ \ldots\ldots,\ \sim x_P,\ x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot(\bigvee_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}))$$

である。||

証明）1 ハザードの存在を表わす性質 3 および定理 3—2 より明らか。▮

定理 3—3：変数 $x_1,\ldots\ldots,x_P$ が変化するとき，$F(\boldsymbol{x})$ に論理ハザードが存在することを表わす論理式は

$$\sim f_F{}^1(x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot f_F{}^{\frac{1}{2}}(x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot\{(\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x}))\vee(\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}))\}$$

である。||

証明）論理ハザードの存在を表わす条件

(iii)′　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)\fallingdotseq\{0,\ 1\}$

は，条件

(iv)′　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=\{0\}$ または

(v)′　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=\{1\}$

と等しい。ところが，定理3―2の証明で述べたように，条件(iv)′を表わす論理式は

$$\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}),$$

条件(v)′を表わす論理式は

$$\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x})$$

である。よって条件(iii)′を表わす論理式は

$$(\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}))\vee(\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x}))$$

となる。一方，

$$|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_P,\ x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot(\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x}))=\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x}),$$

$$\sim|f|_F(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_{P+},\ x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot(\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x}))=0$$

以下同様。

よって，性質5，および定理3―1より定理が得られる。▮

系3―5：変数 $x_1,\ \ldots\ldots,\ x_P$ が変化するとき，$F(\boldsymbol{x})$ に論理0ハザードが存在することを表わす論理式は，

$$\sim f_F{}^1(x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot f_F{}^{\frac{1}{2}}(x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot(\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}\sim|f|_F(\boldsymbol{x})$$

である。||

証明）0ハザードの存在を表わす性質2および定理3―3より明らか。▮

系3―6：変数 $x_1,\ \ldots\ldots,\ x_P$ が変化するとき，$F(\boldsymbol{x})$ に論理1ハザードが存在することを表わす論理式は

$$\sim f_F{}^1(x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot f_F{}^{\frac{1}{2}}(x_{P+1},\ \ldots\ldots,\ x_n)\cdot(\bigwedge_{x_1,\cdots,x_P=0}^{1}|f|_F(\boldsymbol{x}))$$

である。||

証明）1ハザードの存在を表わす性質3および定理3―3より明らか。▮

〔例〕

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=x_2\cdot\sim x_3\vee\sim x_1\cdot x_3\cdot\sim x_3\vee x_1\cdot x_3\cdot x_4\vee$$
$$\sim x_1\cdot\sim x_3\cdot x_4\vee x_2\cdot\sim x_4\vee\sim x_1\cdot x_3\cdot\sim x_4\vee\sim x_1\cdot x_4\cdot\sim x_4$$

において，x_3，x_4 が変化したときの各種のハザードを表わす論理式を求めてみよう*2。

$$F\left(x_1,\ x_2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

となるから，$\sim f_F{}^1(x_1, x_2)\cdot f_F{}^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2)=1$ である。このとき，系3―1より0ハザードの存在を表わす論理式は

$$\sim|f|_F(x_1, x_2, x_3, x_4)\cdot\sim|f|_F(x_1, x_2, \sim x_3, \sim x_4)$$
$$=\sim x_1\cdot\sim x_2\cdot x_3\cdot x_4\vee\sim x_1\cdot\sim x_2\cdot\sim x_3\cdot\sim x_4\vee x_1\cdot\sim x_2\cdot\sim x_3\cdot x_4\vee x_1\cdot\sim x_2\cdot x_3\cdot\sim x_4$$

となり，この論理式が1になる組み合せは

{0 0 1 1, 0 0 0 0, 1 0 0 1, 1 0 1 0}

である。

系3―2より1ハザードの存在を表わす論理式は

$$|f|_F(x_1, x_2, x_3, x_4)\cdot|f|_F(x_1, x_2, \sim x_3, \sim x_4)$$
$$=x_1\cdot x_2\cdot\sim x_3\vee x_2\cdot\sim x_3\cdot x_4\vee x_1\cdot x_2\cdot x_4\vee\sim x_1\cdot\sim x_3\cdot x_4\vee x_2\cdot x_3\cdot\sim x_4\vee\sim x_1\cdot x_3\cdot\sim x_4$$

となり，この論理式が1になる組み合せは

$$\begin{Bmatrix}1\,1\,0\,0, & 1\,1\,1\,1, & 1\,1\,0\,1, & 1\,1\,1\,0\\ 0\,1\,0\,1, & 0\,1\,1\,0, & 0\,0\,0\,1, & 0\,0\,1\,0\end{Bmatrix}$$

である。上記の両者を合わせたものが，存在するすべての静的ハザードである。

一方，

$$\bigvee_{x_3, x_4=0}^{1}|f|_F(x_1, x_2, x_3, x_4)=1,$$

$$\bigvee_{x_3, x_4=0}^{1}\sim|f|_F(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sim x_1\vee\sim x_2,$$

$$\bigwedge_{x_3, x_4=0}^{1}|f|_F(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1\cdot x_2,$$

$$\bigwedge_{x_3, x_4=0}^{1}\sim|f|_F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$$

である。よって，関数0ハザードの存在を表わす論理式は系3―3より，0ハザードと同じで

$$\sim x_1\cdot\sim x_2\cdot x_3\cdot x_4\vee\sim x_1\cdot\sim x_2\cdot\sim x_3\cdot\sim x_4\vee x_1\cdot\sim x_2\cdot\sim x_3\cdot x_4\vee x_1\cdot\sim x_2\cdot x_3\cdot\sim x_4$$

となり，この論理式が1になる組み合せは，

{0 0 1 1, 0 0 0 0, 1 0 0 1, 1 0 1 0}

である。関数1ハザードの存在を表わす論理式は，系3―4より

$$\sim x_1\cdot\sim x_3\cdot x_4\vee\sim x_1\cdot x_3\cdot\sim x_4$$

となり，この論理式が1になる組み合せは

{0 0 0 1, 0 0 1 0, 0 1 0 1, 0 1 1 0}

である。上記の両者を合せたものが，存在するすべての関数ハザードである。また，論理0ハザードは存在せず，論理ハザードはすべて論理1ハザードで，存在を表わす論理式は

$$x_1\cdot x_2$$

となり，この論理式が1になる組み合わせは

＊2：ここでは，文献(5)で使用している例を用いてみた。

$$\{1\,1\,0\,0,\ 1\,1\,1\,1,\ 1\,1\,0\,1,\ 1\,1\,1\,0\}$$

である。

4. 静的ハザードの存在を表わす論理式

ここでは，より一般的に取り扱かって，B-3 値論理関数 $F(x_1, \ldots\ldots, x_i, \ldots\ldots, x_n)$ に，入力変化

$$\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots\ldots, a_i, \ldots\ldots, a_n) \leftrightarrow \boldsymbol{b}(b_1, \ldots\ldots, b_i, \ldots\ldots, b_n)$$

で静的ハザードが存在することを表わす一般的な条件を，a_i，$b_i (i=1, \ldots\ldots, n)$ を論理変数とする論理式で与える。

まず，各 a_i，b_i は 2 値であることに注意すると，前章で述べたように静的ハザードが存在するための条件

(i) $F(\boldsymbol{a})=F(\boldsymbol{b})$

は

$$|f|_F(\boldsymbol{a}) \cdot |f|_F(\boldsymbol{b}) \vee \sim|f|_F(\boldsymbol{a}) \cdot \sim|f|_F(\boldsymbol{b})$$

なる論理式で与えられる。

次に，条件

(ii) $F(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$

を a_i，b_i の論理式で表現することを考えよう。なお，B-3 値論理関数 F において，NOT(～) は各変数の直前にのみ作用するとして一般性を失なわないので，以後，F はこのような表現式とする。

ここで，論理式

$$F \equiv i \ ^{*3} \qquad i \in \{0,\ \tfrac{1}{2},.\ 1\}$$

を F^i と略記するものとすると

$$F^{\frac{1}{2}}=\sim(F^0 \vee F^1)=\sim F^0 \cdot \sim F^1$$

が成立する。よって，条件 $F(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})=1/2$ は論理式として表現する場合は

$$\sim F^1(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b}) \text{ および } \sim F^0(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})$$

が求まれば良いことになる。

ここで，$F^1(\boldsymbol{x})$ の性質を調べてみる。

$$(x \vee y)^1=x^1 \vee y^1,$$
$$(x \cdot y)^1=x^1 \cdot y^1,$$
$$(\sim x)^1=x^0$$

が成立するから，$F(\boldsymbol{x})$ に表われる変数 x_i を $x_i{}^1$ で，$\sim x_i$ を $x_i{}^0$ で置き換えて，他の演算はそのままにして得られる式が $F^1(\boldsymbol{x})$ となる。

さて，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b}$

は $\boldsymbol{c}=(c_1, \ldots\ldots, c_i, \ldots\ldots, c_n)$

* 3：論理記号≡は，両辺のすべての真理値が等しいことを表わす。すなわち，$F \equiv i$ と $\delta_i F$ とは等しい。

とすると

$$c_i=a_i\cdot b_i\vee\frac{1}{2}\cdot(a_i\vee b_i)\qquad(i=1,\ldots\ldots,n)\qquad a_i,\ b_i\in V_2$$

であったから[6]，$F^1(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})$ は $F^1(\boldsymbol{x})$ において x_i の代りに $a_i\cdot b_i\vee 1/2\cdot(a_i\vee b_i)$ を代入すればよい。ところで，

$$x_i^1=(a_i\cdot b_i\vee\frac{1}{2}\cdot(a_i\vee b_i))^1=a_i\cdot b_i$$

$$x_i^0=(a_i\cdot b_i\vee\frac{1}{2}\cdot(a_i\vee b_i))^0=\sim a_i\cdot\sim b_i$$

である。以上により，$F^1(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})$ は

x_i の代りに　$a_i\cdot b_i$,

$\sim x_i$ の代りに　$\sim a_i\cdot\sim b_i$

を代入して，他の演算はそのままにして得られる式となる。この式を

$$|f|_F^*(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

で表わすことにする。

次に，$\sim F^0(\boldsymbol{x})$ の性質を調べてみる。

$$\sim(x\vee y)^0=\sim x^0\vee\sim y^0,$$

$$\sim(x\cdot y)^0=\sim x^0\cdot\sim y^0,$$

$$\sim(\sim x)^0=\sim x^1$$

が成立するから，$F(\boldsymbol{x})$ に表われる変数 x_i を $\sim x_i^0$，$\sim x_i$ を $\sim x_i^1$ で置き換えて，他の演算はそのままにして得られる式が $\sim F^0(\boldsymbol{x})$ となる。ところで

$$\sim x_i^0=\sim(a_i\cdot b_i\vee\frac{1}{2}\cdot(a_i\vee b_i))^0=a_i\vee b_i$$

$$\sim x_i^1=\sim(a_i\cdot b_i\vee\frac{1}{2}\cdot(a_i\vee b_i))^1=\sim a_i\vee\sim b_i$$

であるから前と同様に，$\sim F^0(\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})$ は

x_i の代りに　$a_i\vee b_i$,

$\sim x_i$ の代りに　$\sim a_i\vee\sim b_i$

を代入して，他の演算はそのままにして得られる式となる。この式を

$$|f|_F^*(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b})$$

と表わすことにする。

以上により，条件（ii）は

$$\sim|f|_F^*(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot|f|_F^*(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b})$$

なる論理式によって表わされるから，次の定理を得る。

定理 4—1： $F(\boldsymbol{x})$ に $\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$ で静的ハザードが存在することを表わす論理式は

$$\sim|f|_F^*(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot|f|_F^*(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b})\cdot\{|f|_F(\boldsymbol{a})\cdot|f|_F(\boldsymbol{b})\vee\sim|f|_F(\boldsymbol{a})\cdot\sim|f|_F(\boldsymbol{b})\}$$

である。||

証明）上記のことより明らか。▮

B-3 値論理関数 F を 2 値論理関数 $|f|_F$ として見るとき，相補積（和）単項式は省略して良かった。$\sim x_i \cdot x_i$ なる式に対して

$$(\sim a_i \cdot \sim b_i) \cdot (a_i \cdot b_i) = 0$$

より $|f|_F{}^*(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ においても相補積単項式は省略してもよい。ただし，$(\sim x_i \vee x_i)$ なる式に対しては

$$(\sim a_i \cdot \sim b_i \vee a_i \cdot b_i)$$

となり，相補和単項式は省略できない。逆に，$|f|_F{}^*(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})$ においては，相補和単項式は省略できるが，相補積単項式は省略できない。

系 4—1： $F(\boldsymbol{x})$ に $\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b}$ で 0 ハザードが存在することを表わす論理式は

$$\sim |f|_F{}^*(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot |f|_F{}^*(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \cdot \sim |f|_F(\boldsymbol{a}) \cdot \sim |f|_F(\boldsymbol{b})$$

である。||

証明）0 ハザードの存在を表わす性質 2 および定理 4—1 より明らか。▮

系 4—2： $F(\boldsymbol{x})$ に $\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b}$ で 1 ハザードが存在することを表わす論理式は

$$\sim |f|_F{}^*(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot |f|_F{}^*(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \cdot |f|_F(\boldsymbol{a}) \cdot |f|_F(\boldsymbol{b})$$

である。||

証明）1 ハザードの存在を表わす性質 3 および定理 4—1 より明らか。▮

論理式

$$\bigvee_{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}} |f|_F(\boldsymbol{x}) \qquad (\bigwedge_{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}} |f|_F(\boldsymbol{x}))$$

は，$|f|_F$ の各変数 x_i に，$a_i \cdot b_i$，$a_i \vee b_i$ のすべての組み合せを代入して得られる式の OR (AND) で表現される論理式を表わすものとする。

〔例〕　$F(x_1,\ x_2) = x_1 \cdot x_2$

とするとき，

$$\bigvee_{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}} |f|_F(x_1, x_2) = a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2 \vee a_1 \cdot b_1 \cdot (a_2 \vee b_2) \vee (a_1 \vee b_1) \cdot a_2 \cdot b_2 \vee (a_1 \vee b_1) \cdot (a_2 \vee b_2)$$

$$= a_1 a_2 \vee a_1 b_2 \vee a_2 b_1 \vee b_1 b_2$$

である。

定理 4—2： $F(\boldsymbol{x})$ に $\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b}$ で論理ハザードが存在することを表わす論理式は

$$\sim |f|_F{}^*(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot |f|_F{}^*(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \cdot \{(\bigwedge_{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}} |f|_F(\boldsymbol{x})) \vee (\bigwedge_{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}} \sim |f|_F(\boldsymbol{x}))\}$$

である。||

証明）論理式

$$\bigwedge_{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}} |f|_F(\boldsymbol{x})$$

は，　$a_i = b_i$　のとき　$a_i = b_i = a_i \cdot b_i = a_i \vee b_i$,

　　　$a_i \neq b_i$　のとき　$a_i \cdot b_i = 0,\quad a_i \vee b_i = 1$

であるから，a_i と b_i が異なるところで，0 および 1 のあらゆる組み合せを代入することにより得られるすべての論理式の AND であるから，条件

(v)′　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=\{1\}$

と等しいことになる。

同様に，論理式

$$\bigwedge_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}\sim|f|_F(\boldsymbol{x})$$

は，条件

(iv)′　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=\{0\}$

を表わしている。よって論理ハザードが存在することを表わす論理式は

$$\sim|f|_F{}^*(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot|f|_F{}^*(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b})\cdot\{(\bigwedge_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}))\vee(\bigwedge_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}|f|_F(\boldsymbol{x}))\}$$
$$\cdot\{|f|_F(\boldsymbol{a})\cdot|f|_F(\boldsymbol{b})\vee\sim|f|_F(\boldsymbol{a})\cdot\sim|f|_F(\boldsymbol{b})\}$$

となる。ここで，$\bigwedge_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}|f|_F(\boldsymbol{x})$ の中には必ず $|f|_F(\boldsymbol{a})$, $|f|_F(\boldsymbol{b})$ と等しいものがあり，$\bigwedge_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}\sim|f|_F(\boldsymbol{x})$ の中には $\sim|f|_F(\boldsymbol{a})$, $\sim|f|_F(\boldsymbol{b})$ と等しいものがあるから定理を得る。▮

系 4—3： $F(\boldsymbol{x})$ に $\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$ で論理0ハザードが存在することを表わす論理式は

$$\sim|f|_F{}^*(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot|f|_F{}^*(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b})\cdot(\bigwedge_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}))$$

である。||

証明）0ハザードの存在を表わす性質2および定理4—2より明らか。▮

系 4—4： $F(\boldsymbol{x})$ に $\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$ で論理1ハザード存在することを表わす論理式は，

$$\sim|f|_F{}^*(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot|f|_F{}^*(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b})\cdot(\bigwedge_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}|f|_F(\boldsymbol{x}))$$

である。||

証明）1ハザードの存在を表わす性質3および定理4—2より明らか。▮

定理 4—3： $F(\boldsymbol{x})$ に $\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$ で関数ハザードが存在することを表わす論理式は，

$$\sim|f|_F{}^*(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot|f|_F{}^*(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b})\cdot\{(\bigvee_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}))\cdot|f|_F(\boldsymbol{a})$$
$$\cdot|f|_F(\boldsymbol{b})\vee(\bigvee_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}|f|_F(\boldsymbol{x}))\cdot\sim|f|_F(\boldsymbol{a})\cdot\sim|f|_F(\boldsymbol{b})\}$$

である。||

証明）関数ハザードの存在条件

(iii)　$F((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})^*)=\{0,\ 1\}$

を表わす論理式は

$$\sim((\bigwedge_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}))\vee(\bigwedge_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}|f|_F(\boldsymbol{x}))=(\bigvee_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}|f|_F(\boldsymbol{x}))\cdot(\bigvee_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}}\sim|f|_F(\boldsymbol{x}))$$

となるから，定理3—2，および定理4—2の証明と同様にして定理を得る。▮

系 4—5： $F(\boldsymbol{x})$ に $\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{b}$ で関数0ハザードが存在することを表わす論理式は，

$$\sim|f|_F{}^*(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot|f|_F{}^*(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b})\cdot(\bigvee_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}|f|_F(\boldsymbol{x}))\cdot\sim|f|_F(\boldsymbol{a})\cdot\sim|f|_F(\boldsymbol{b})$$

である。||

証明）0ハザードの存在を表わす性質2および定理4—3より明らか。▮

系 4—6：$F(x)$ に $a \leftrightarrow b$ で関数 1 ハザード存在することを表わす論理式は，

$$\sim|f|_{F^*}(a \cdot b) \cdot |f|_{F^*}(a \vee b) \cdot (\bigvee_{a \cdot b}^{a \vee b} \sim|f|_F(x)) \cdot |f|_F(a) \cdot |f|_F(b)$$

である。||

証明）1ハザードの存在を表わす性質 3 および定理 4—3 より明らか。■

5. あ と が き

AND, OR, NOT 素子で構成された論理回路網内に存在する静的ハザードの検出について述べた。特に，静的ハザードが存在することを表わす必要十分条件を，変化する変数を論理変数とする 2 値論理式で与えた。これにより，すべての静的ハザードを検出することができる。

本論文での結果に基づいて，順序回路におけるハザード，および，B-3 値論理を少し変形することにより動的ハザードなどについても考察することができるが，これらのことについては別稿にゆづりたい。

最後に，日頃，御指導頂く本学後藤以紀教授，電子技術総合研究所駒宮安男電子ディバイス部長，長田正情報制御研究室長をはじめ，電子技術総合研究所での研究に御便宜を計って頂く上滝致孝制御部長，佐藤システム制御研究室長に感謝致します。

参 考 文 献

1） D. A. Huffman : The design and use of hazard-free switching net works, J. ACM, 4, 1 (1957)

2） E. J. McCluskey : Transients in combinational logic circuits, Redundancy Techniques for Computing Systems, Spartan Book Co. (1962)

3） M. Yoeli, S. Rinon : Application of Ternary Algebra to the Static Hazards, J. ACM, 11, 1 (1964)

4） E. B. Eiehelberger : Hazard Detection in Combinational and Sequential Switching Circuits, IBM J., 9, 2 (1965)

5） 杉野，稲垣，福村：多入力変数の変化による静的ハザードの 3 値論理を用いた一検出法，電子通信学会誌，50, 2 (1967)

6） 向殿：静的ハザードの定式化について，明治大学科学技術研究所紀要，No. 9 (1970)